

# ヘリカル四重極収束系の解析 (II)

森田 昭夫<sup>1</sup>、岩下 芳久  
 京都大学化学研究所附属原子核科学研究施設  
 〒 611-0011 京都府宇治市五ヶ庄

## 概要

軸方向に四重極磁場をねじった構造を持つヘリカル四重極収束系は FODO 収束系に比べて高い対称性を持ち、近軸近似できれいな形に Transfer Matrix が書き下せるなどの面白い性質を持っている。捕獲・輸送系として見た場合、高い運動量領域の粒子に対してヘリカル四重極収束系は、既存のソレノイド磁場によるものと比較して低い最大磁束密度でより広い範囲の粒子を捕捉可能であることが明らかになった。

## 1. はじめに

ヘリカル四重極収束系は、軸方向に四重極磁場をねじった構造を持っている。図 1 に示すのは、内径の 10 倍を磁極周期とする緩やかにねじられた理想的なヘリカル四重極収束系の磁極面 (等ポテンシャル面) の一例である。四重極磁場にねじりを与えたヘリカル四重極収束系で

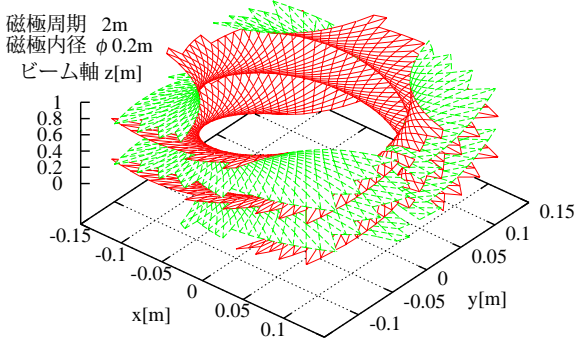


図 1: ヘリカル四重極収束系の磁極面

は、同じ磁場勾配の FODO 収束系と比較して、整合されたビームのエミッタンス当りのビームサイズが小さくなる [1]。従って、ヘリカル四重極収束系は x-y 結合が問題にならない大エミッタンスの輸送系として有望である。ここでは近軸近似による取り扱いを概説した後で、2次粒子の捕獲・輸送系としての特徴を既存のソレノイド磁場によるものと比較しながら明らかにする。

## 2. 近軸近似による取り扱い

Maxwell 方程式を満足するヘリカル四重極収束系の磁場  $\mathbf{B}$  と磁気スカラーポテンシャル  $\Phi$  は、変形 Bessel 関数

$I_2(r)$  を用いて円柱座標系で次のように与えられる。

$$\mathbf{B} = -\nabla\Phi \quad (1)$$

$$\Phi(r, \theta, z) = \frac{\Phi_0}{k} I_2(kr) \sin(2\theta - kz), \quad k = \frac{2\pi}{L} \quad (2)$$

ここで、 $L$  は磁場の周期長である。

動径関数を級数展開した磁場の成分表式は

$$B_r = -\frac{\Phi_0}{4} \left( kr + \frac{(kr)^3}{6} + O(r^5) \right) \sin(2\theta - kz) \quad (3)$$

$$B_\theta = -\frac{\Phi_0}{4} \left( kr + \frac{(kr)^3}{12} + O(r^5) \right) \cos(2\theta - kz) \quad (4)$$

$$B_z = \frac{\Phi_0}{8} \left( (kr)^2 + \frac{(kr)^4}{12} + O(r^6) \right) \cos(2\theta - kz) \quad (5)$$

で与えられ、近軸では回転した四重極磁場に相当する。

磁気ポテンシャル (2) から、磁場  $\mathbf{B}(r, \theta, z)$  と Transfer Matrix  $M_{HQFC}(s_{out}|s_{in})$  の並進変換は回転行列  $R(\theta)$  を用いて、近似に依らず次のように書き下せる。

$$\mathbf{B}(r, \theta, z + C) = R\left(\frac{kC}{2}\right) \mathbf{B}(r, \theta - \frac{kC}{2}, z) \quad (6)$$

$$M_{HQFC}(s_{out}|s_{in}) =$$

$$R\left(\frac{ks_{in}}{2}\right) M_{HQFC}(s_{out} - s_{in}|0) R\left(-\frac{ks_{in}}{2}\right) \quad (7)$$

Transfer Matrix を  $N$  等分したものに、この並進変換を施して回転行列をまとめると、二つの回転行列と同一行列の行列積の形に分解することが出来る。

$$M_{HQFC}(s_{out}|s_{in}) =$$

$$R\left(\frac{ks_{out}}{2}\right) M_{core}(s_{out} - s_{in}) R\left(-\frac{ks_{in}}{2}\right) \quad (8)$$

$$M_{core}(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{N-1} R\left(-\frac{ks}{2N}\right) M_{HQFC}\left(\frac{s}{N}|0\right) \quad (9)$$

ヘリカル四重極磁場に於けるねじれが Transfer Matrix  $M_{HQFC}$  へ及ぼす影響は距離  $s$  の 2 次以上の項として現れるので、式 (9) で極限を取る際に寄与しない。よって、無限行列積に現れる  $M_{HQFC}$  は近軸では純粋な四重極場の Transfer Matrix で置き換えられる。もはや、未知の行列は存在しないので要素行列  $R(-ks/2N)M_{HQFC}(s/N|0)$  の固有ベクトルと固有値の  $N$  乗の極限で行列  $M_{core}$  の固有値・固有ベクトルを与えることが出来る。中心での四重極場の勾配  $K$  を用

<sup>1</sup>E-mail: morita@kyticr.kuicr.kyoto-u.ac.jp

いた具体的表式は次の通りである (複号同順)。

$$\lambda_H = e^{\pm i\sqrt{\frac{k^2}{4} + K}s}, \quad \mathbf{u}_H = \begin{pmatrix} \frac{\pm i\sqrt{k^2 + 4K}}{k} \\ 2K/k \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\lambda_L = e^{\pm i\sqrt{\frac{k^2}{4} - K}s}, \quad \mathbf{u}_L = \begin{pmatrix} k/2K \\ 0 \\ \frac{\pm i\sqrt{k^2 - 4K}}{2K} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

こうして求めた固有ベクトルと固有値を用いることで、整合されたビームのエミッタンス楕円を表す 4 元  $\sigma$ -Matrix<sup>[2]</sup> は固有空間で定義した Hermite 形式から固有ベクトルを使った座標変換で簡単に得ることが出来る。このとき固有空間上で二つの固有振動を組み合わせる比率に関する自由度が存在するが、ここでは特別な軸が存在しない場合として各軸の部分エミッタンスが等しいという次の条件を科す。

$$\varepsilon_x = \det \sigma_{xx} = \det \sigma_{yy} = \varepsilon_y \quad (12)$$

この条件のもとで求めたビームの包絡線をエミッタンスで正規化すると次式が得られる。

$$\frac{(x_{env}(s))^2}{\sqrt{\mathcal{E}}} = \beta_x(s) = \frac{L}{4\pi} \frac{\pi^2}{G} \frac{2 - \frac{G^2}{\pi^4} + \frac{G}{\pi^2} \cos ks}{\left(1 - \frac{G}{\pi^2}\right) \sqrt{1 + \frac{G}{\pi^2}}} \quad (13)$$

$$\frac{(x'_{env}(s))^2}{\sqrt{\mathcal{E}}} = \gamma_x(s) = \frac{1}{L} \frac{\pi}{4} \frac{G}{\pi^2} \frac{1 - \frac{G}{\pi^2} \cos ks}{\left(1 - \frac{G}{\pi^2}\right) \sqrt{1 + \frac{G}{\pi^2}}} \quad (14)$$

$$\beta_y(s) = \beta_x\left(s + \frac{L}{2}\right), \quad \gamma_y(s) = \gamma_x\left(s + \frac{L}{2}\right) \quad (15)$$

ここで、 $G$  は収束力を表す無次元量  $KL^2$  であり、 $\mathcal{E}$  は 4 元エミッタンス [ $\text{m}^2\text{rad}^2$ ] である。関数  $\beta(s), \gamma(s)$  は、 $x$ - $y$  結合が解けていれば Twiss パラメータそのものである。

### 3. 輸送能力

ヘリカル四重極収束系とソレノイド磁場を輸送系として使う場合の能力評価の一つとして、輸送系軸上の一点から出て来る荷電粒子をどれだけ広い角度まで捕獲出来るかという指標を考える。実装上の制約を考慮し、輸送系の内半径  $R_{bore}$  を等しくし、輸送系内の最大磁束密度  $B_{max}$  と捕獲・輸送可能な最大発散角  $\theta_{max}$  にて比較を行なう。

#### 3.1 ソレノイド磁場

無限に長いソレノイドでは、ソレノイド内の全ての領域で一定の磁場  $B_{max}$  が発生している。軸上の一点から出て来る粒子の曲率半径は磁場と直交方向の運動量  $p_{\perp}$  で決まり、その曲率半径は輸送系の内半径の半分に制限される。従って、捕捉可能な最大発散角は次のように与えられる。

$$\rho(\theta) = \frac{p_{\perp}}{qB_{max}} = \frac{p \sin \theta}{qB_{max}} < \frac{1}{2} R_{bore} \\ \rightarrow \theta_{max} = \sin^{-1} \left( \frac{1}{2} \frac{B_{max} R_{bore}}{B\rho} \right) \quad (16)$$

ここで、 $B\rho$  は粒子の電荷  $q$  当りの運動量である。

式 (16) が示すように、ソレノイド磁場の本質は磁気トラップであり、粒子の運動量に対して十分大きな  $B_{max} R_{bore}$  積が得られれば、いかなる方向の粒子も捕獲出来る。

#### 3.2 ヘリカル四重極収束系

捕捉可能な最大発散角  $\theta_{max}$  は、一般に輸送系の内半径に接する包絡線を持つ任意のエミッタンス楕円体を仮定し、これが受け入れられる軸上での発散角を評価することで得られる。しかし、任意のエミッタンス楕円体を考慮するのは難しい。また、輸送系の内壁が軸対称であると仮定すると、 $x, y$  両軸の部分エミッタンスが大きく偏った状態が有利であるとは考えにくい。そこで、一般の場合は非線形項の寄与も含め軌道追跡を行なうものとし、ここでは前節で扱った近軌近似のもとで  $x, y$  両軸の部分エミッタンスが等しい状態のみを考えることにする。

十分長くヘリカル四重極収束系を考えると、通過距離への依存性は現れなくなるので、始点での磁場に対する方向の違いは始点の位置の違いに置き換えられるので、 $x$  軸のみを考えれば良い。通過できる最大エミッタンスは、包絡線  $x_{env}(s, \varepsilon)$  が輸送系の内半径に接するところで制限される。また、受け入れられる最大発散角は位置依存性があり簡単には書き下せない。しかし、その最大値は包絡線  $x'_{env}(s, \varepsilon)$  で押え込める。式 (13), (14) の包絡線関数を用いると、これらの条件は以下のように書き下せる。

$$x_{env}(s, \varepsilon) = \sqrt{\beta_x(s)\varepsilon} \leq \sqrt{\beta_{max}\varepsilon} \leq R_{bore} \quad (17)$$

$$x'_{env}(s) = \sqrt{\gamma_x(s)\varepsilon} \geq \sqrt{\gamma_{min}(s)\varepsilon} \geq \tan \theta_{max} \quad (18)$$

従って、最大発散角  $\theta_{max}$  の見積もりは次のように書き下せる。

$$\theta_{max} \sim \tan^{-1} \left( R_{bore} \sqrt{\frac{\gamma_{min}}{\beta_{max}}} \right) \\ = \tan^{-1} \left( \frac{R_{bore}}{L} \frac{G}{\pi} \sqrt{\frac{1 - \frac{G}{\pi^2}}{2 + \frac{G}{\pi^2} - \frac{G^2}{\pi^4}}} \right) \quad (19)$$

従って、最大発散角  $\theta_{max}$  は輸送系の内半径  $R_{bore}$  と磁場の周期  $L$  の比で決まる構造因子と収束能力を表す無次元量  $G$  による項で構成され、後者は  $G$  が約 6.7 の時に最大値 0.82 を取る。また、安定領域の低運動量端である  $G = \pi^2$  に近付くと急激に減少し、受け入れられる発散角が狭くなる。

こうした性質は、ヘリカル四重極収束系が周期性を持ったレンズ系であるためのものである。設計には、構造因子  $R_{bore}/L$  で捕捉角  $\theta_{max}$  が制限され、外周部での非線形効果による影響を避けるためには  $R_{bore}/L$  を大きく取れないと言う形で現れる。

#### 3.3 試算

ここまでの検討から分かる通り、低運動量領域ではソレノイド磁場が圧倒的に有利である。従って、ここでは比較的高い運動量領域での試算と比較を行なう。試算の

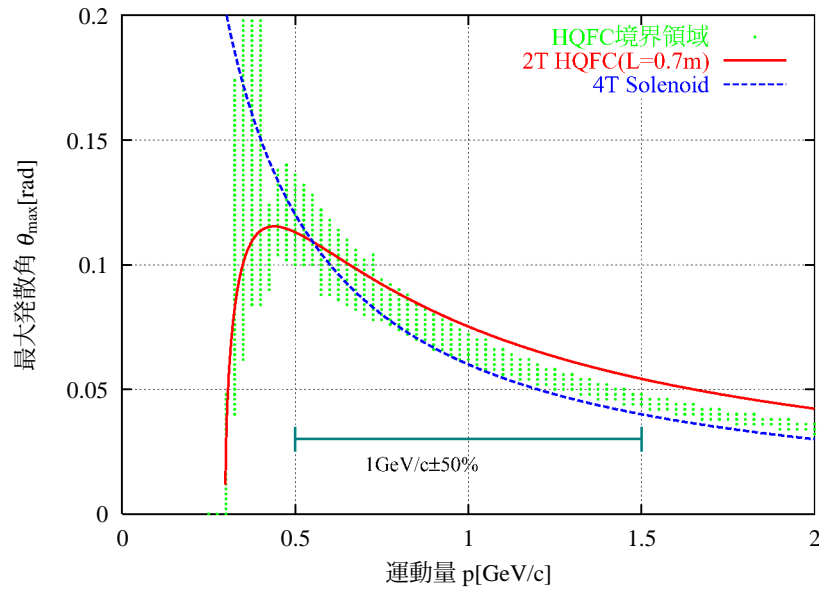


図 2: 捕獲可能な最大発散角の運動量依存性

対象として、1GeV/c 程度の運動量を目標にしたニュートリノファクトリーの Muon Decay Channel を選択した。ここで、扱う運動量幅を  $\pm 50\%$ 、輸送系の内半径を 100mm と仮定し、ヘリカル四重極収束系では最大磁束密度を永久磁石での実現が可能な 2T に選び、比較対象のソレノイド磁場として実用的な 4T の超伝導ソレノイドを仮定する。ヘリカル四重極収束系の磁場の周期  $L$  は、目標運動量範囲の下限 0.5GeV/c を余裕を持って扱えるように 0.7m に選んだ。

図 2 は、軸上一点から放射される粒子の捕獲可能な最大発散角の運動量依存性を示している。図中の実線は式 (19) による周期 0.7m 最大磁束密度 2T のヘリカル四重極収束系を示し、点線は式 (16) による最大磁束密度 4T のソレノイド磁場を示している。また、図中の点群はヘリカル四重極収束系中で 30 周期 (21m) の軌道追跡を行なって求めた同一の発散角を持つ粒子が全て通過する通過領域と全く通過できなくなる阻止領域の間にある境界領域を示している。この境界領域が幅を持つのは、ヘリカル四重極収束系が四重極レンズであるために最初に受ける力の収束・発散の度合いによる違いを示している。

図 2 に示される通り、2T のヘリカル四重極収束系は目標とした 1GeV/c  $\pm 50\%$  の領域で 4T のソレノイド磁場とほぼ同じ発散角を捕獲しており、設計条件によっては超伝導ソレノイドを熱負荷に強い常伝導もしくは永久磁石によるヘリカル四重極収束系で置き換えることも可能である。

図中の軌道追跡による評価と式 (19) の評価には違いが有る。これは発散角からエミッタンスを見積もった式 (14) で受け入れ可能な発散角の位置依存性を正しく含まれていないためであるが、全体的な傾向は良く再現されている。また、800MeV/c 以下の低運動量領域で見られる境界の不連続な変化は、磁場の非線形項に起因する不安定性の現れで輸送系の長さを短くするとこうした不連続な境界線付近の通過領域が広がる傾向が有る。

#### 4. 後続の光学系との整合

ヘリカル四重極収束系を捕獲・輸送系として使用する場合、後続の光学系への整合を考慮する必要がある。Transfer Matrix の分解表示 (9) とその固有値から、二つの固有振動の周波数  $\sqrt{k^2/4 + K}$ ,  $\sqrt{k^2/4 - K}$  の比が有理数になる特別な条件の元ではヘリカル四重極収束系の Transfer Matrix が回転行列になる点が周期的に現れることが導かれる。この性質を用いれば、単色もしくは準単色のビームに対しては磁場勾配  $K$  や周期  $L$  を適切に調整することで、始点と同じ条件で後続の光学系へ接続できるが、広い運動量幅を持った 2 次ビームに対してはこうした条件を維持することが出来ない。こうした運動量広がりを持ったビームに対して、ねじりの方向を反転させたヘリカル四重極収束系を並べることで、位相空間分布をねじり戻し運動量依存性の消える点を作る方法が考えられるが、二つのヘリカル四重極収束系の接続には接続部の不整磁場による影響の評価など検討すべき課題が残っている。

#### 5. まとめ

後続の光学系との整合に難点は有るものの、高運動量の粒子を捕獲する場合は条件如何ではソレノイドの半分程度の磁場で同じ捕獲能力を持ったヘリカル四重極収束系を構成できることが明らかになった。また、設計時の捕獲能力の指標となる簡単な表式 (19) を得ることが出来た。

#### 参考文献

- [1] A.Morita and Y.Iwashita, “ヘリカル四重極収束系の解析”, Proceedings of the 25<sup>th</sup> Linear Accelerator Meeting in Japan, Himeji, Jul. 12-14, 2000(p.270-272)
- [2] K.L.Brown and S.K.Howry, “TRANSPORT/360”, Stanford Linear Accelerator Center Report 91(1970)